Gleichung von

Winkelhalbierenden

Lösungsmethoden zu den Aufgaben:

1. Welche Gleichungen haben die Winkelhalbierenden zweier gegebener Geraden.

2. Wie teilt eine Winkelhalbierende die Gegenseite des Dreiecks?

Interessante Denkaufgaben für den Unterricht der Oberstufe!!

Auch mit Vektorrechnung.

Datei Nr. 20020

Stand: 15. August 2011

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

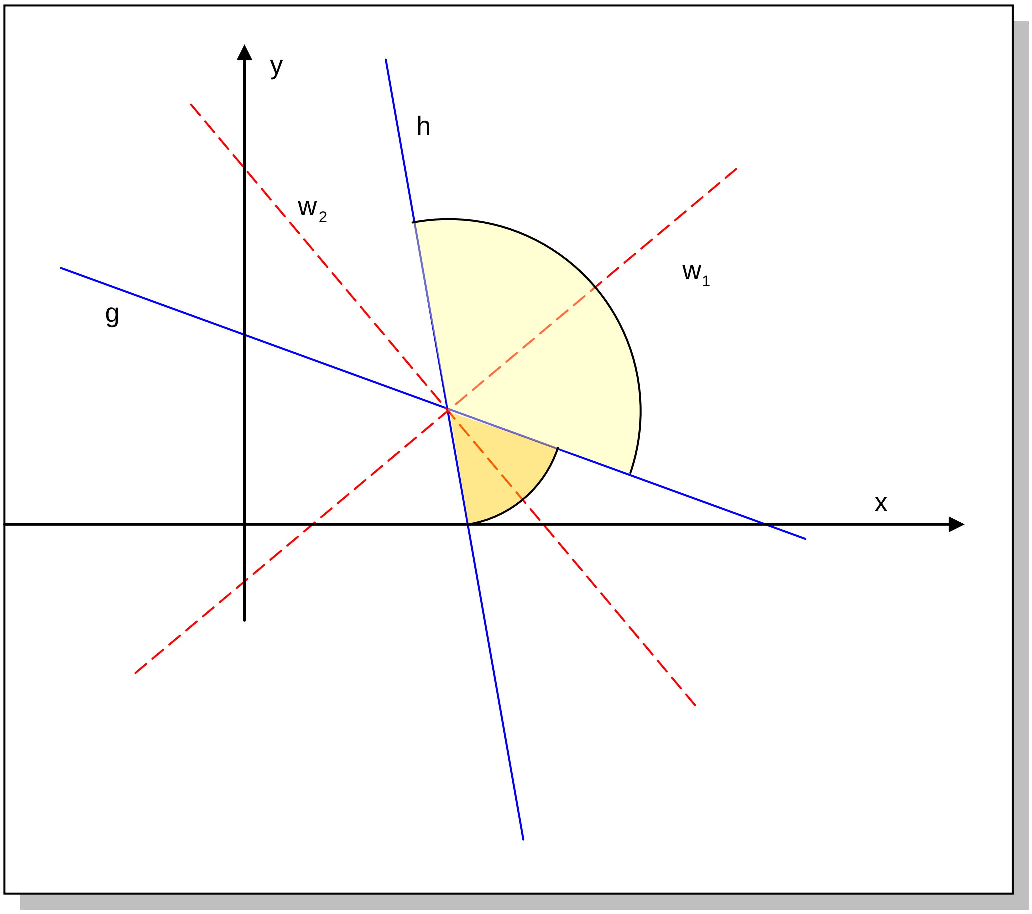
1. Die Gleichung einer Winkelhalbierenden

Gegeben sind zwei nicht parallele Geraden durch ihre Gleichung.
Welche Gleichungen haben die beiden Winkelhalbierenden dazu?

Überlegungen dazu

Zu zwei sich schneidenden Geraden gibt es bekanntlich 4 Winkel, von denen die beiden gegenüber liegenden Winkel jeweils gleich groß sind (Gegenwinkel). Also gibt es 2 Winkelhalbierende, die zueinander orthogonal sind (d. h. die aufeinander senkrecht stehen).

Die Berechnung der Steigungen der beiden Winkelhalbierenden ist relativ kompliziert.
Daher biete ich vier verschiedene Verfahren dazu an.



Beispiel 1 Gegeben sind g_1: $y = -4x$ und g_2: $y = 0$
Berechne die Gleichung der beiden Winkelhalbierenden.

Die Situation wird in dieser Aufgabe dadurch erleichtert, dass die 2. Gerade die x-Achse ist. Damit kann man aus der Steigung -4 der Geraden g_1 den Steigungswinkel als Winkel zwischen den beiden Geraden ermitteln. Diesen kann man berechnen, halbieren und daraus die Steigungen der beiden Winkelhalbierenden errechnen.

1. Methode: <u>Bestimmung der Winkelhalbierenden durch Halbierung des Winkels</u>

Die beiden Schenkel des Winkels haben die Gleichungen g_1: $y = -4x$ und g2: $y = 0$.

Die Steigung -4 besagt, dass für den Steigungswinkel von g_1 gilt: $\tan\alpha = -4$.

Dazu gehört $\alpha = 75{,}96375653\ldots$. (Näherungswert mittels Taschenrechner).

Diesen Winkel muss man halbieren und dann wieder den Tangens berechnen.
Denn es gilt ja $m = \tan\frac{\alpha}{2}$.

Die Verwendung eines Taschenrechners liefert nur Näherungswerte für die Steigungen:

$m = \tan\frac{\alpha}{2} \approx 1{,}28$.

Steigung für die Winkelhalbierende w_1: $y = 1{,}28 \cdot x$.

```
tan⁻¹ -4
                 -75.96375653
Ans+180
                  104.0362435
Ans÷2
                  52.01812173
tan Ans
                  1.280776406
```

Die zweite Winkelhalbierende ist zur ersten orthogonal, also gilt: $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -1{,}28 \approx -0{,}78$: w_2 : $y = -0{,}78 \cdot x$.

<u>2. Methode:</u> Verwendung der <u>Formel für den halben Winkel</u>: $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$

Mit dieser trigonometrischen Umrechnungsformel, die man in Formelsammlungen entdecken kann, erhält man die genauen Steigungen der beiden Winkelhalbierenden:

Wegen $m = \tan\alpha$ folgt: $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+m_1^2}}{m_1}$

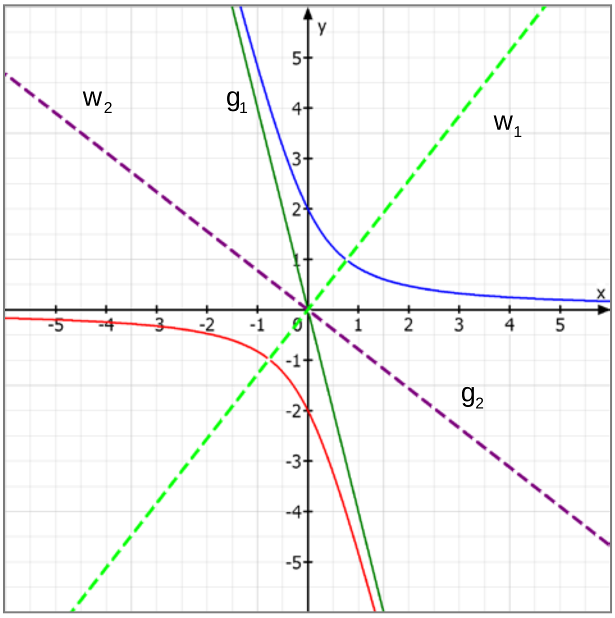
Und mit m, = -4: $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{-4} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{-4} = \frac{1 \mp \sqrt{17}}{4} = \begin{cases} -0{,}78 \\ 1{,}28 \end{cases}$

Und schon haben wir die beiden Steigungen!

Die Geradengleichungen lauten dann: w_1: $y = \frac{1+\sqrt{17}}{4}x \approx 1{,}28x$

und w_2: $y = \frac{1-\sqrt{17}}{4}x \approx -0{,}78x$

Hier die Abbildung dazu:



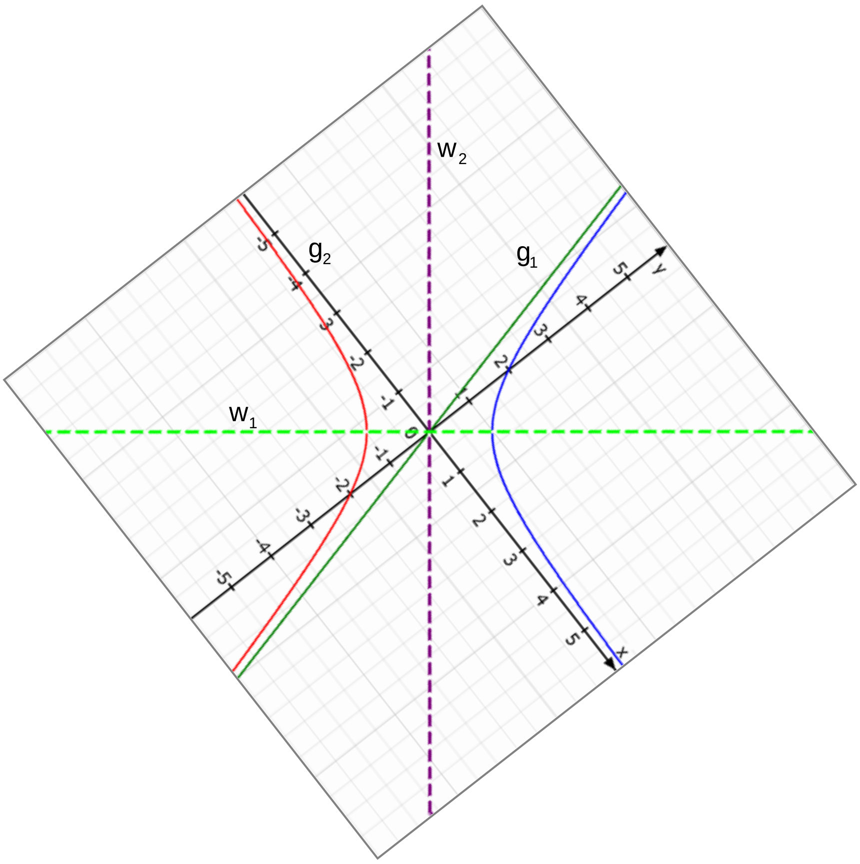
Die beiden Geraden g_1 und g_2 treten als Asymptoten der beiden Funktionen auf:

$$f_1(x) = -2x + 2\sqrt{x^2+1}$$

$$f_2(x) = -2x - 2\sqrt{x^2+1}\,.$$

Die beiden Winkelhalbierenden sind dann Symmetrieachsen für die beiden Kurven.-

Dreht man das Schaubild, so dass die winkelhalbierenden zu vertikalen bzw. horizontalen Geraden werden, erkennt man die Winkel und ihre Halbierung besser:



3. Methode: Verwendung einer Raute.

Da eine Raute vier gleich lange Seiten hat, ist ihre Diagonale zugleich die Winkelhalbierende!

Man kann sich daher eine Raute konstruieren und ihre Diagonale als Winkelhalbierende verwenden.

Dazu wählt man auf w_1 die beiden Punkte $O(0|0)$ und $A(-1|4)$.

Die Strecke OA hat die Länge $\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$.

Daann muss die nächste, auf der x-Achse liegende Strecke auf diese Länge haben.
Man erreicht das, indem man den Punkt B so wählt: $B\left(\sqrt{17}\,|\,0\right)$.

Nun erstellt man die Gleichungen der Parallelen zu diesen Seiten durch A und B:

Parallele zur x-Achse durch A: p_1: $y=4$

Parallele zu g_1 durch B: p_2: $y-0=-4\cdot\left(x-\sqrt{17}\right)$ bzw. $y=-4x+4\sqrt{17}$

Schneidet man diese beiden Geraden, erhält man den Eckpunkt C der Raute:

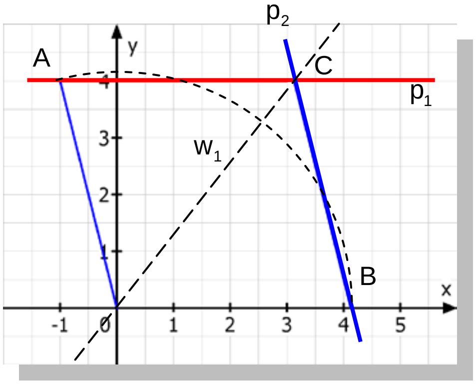
$$4=-4x+4\sqrt{17} \Leftrightarrow 4x=4+4\sqrt{17} \Leftrightarrow x_C=1+\sqrt{17}$$

mit y = 4: $C\left(4\,|\,1+\sqrt{17}\right)$.

Die Gerade w_1 = OC hat dann die Steigung: $m_1=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$

und die Gleichung $y=\frac{1+\sqrt{17}}{4}\cdot x\approx 1{,}28\cdot x$. (Siehe 2. Methode!)

Für die dazu orthogonale Gerade w_2 verwendet man den negativen Kehrwert als Steigung:
$m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{\sqrt{17}-1}{4}\approx-\frac{1}{1{,}28}\approx-0{,}78$, was dann zu $y=-0{,}78\cdot x$ führt.



4. Methode: Vektoriell

Eine Raute lässt sich vektoriell sehr gut berechnen:

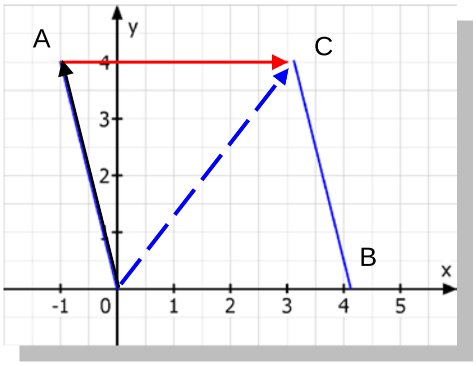
Man geht zunächst wie in der 3. Methode von $O(0\,|\,0)$ und $A(-1|\,4)$ aus.

Die Strecke OA hat die Länge $\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

Damit eine Raute entsteht, muss man B auf der 2. Geraden, der x-Achse so wählen, dass OA und OB gleich lang sind.

Also wählt man auf g_2: $B\left(\sqrt{17}\,|\,0\right)$.

Der Unterschied zur 3. Methode besteht jetzt darin, C durch Addition zweier Vektoren zu berechnen:



$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sqrt{17}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{17}-1\\4\end{pmatrix}$$

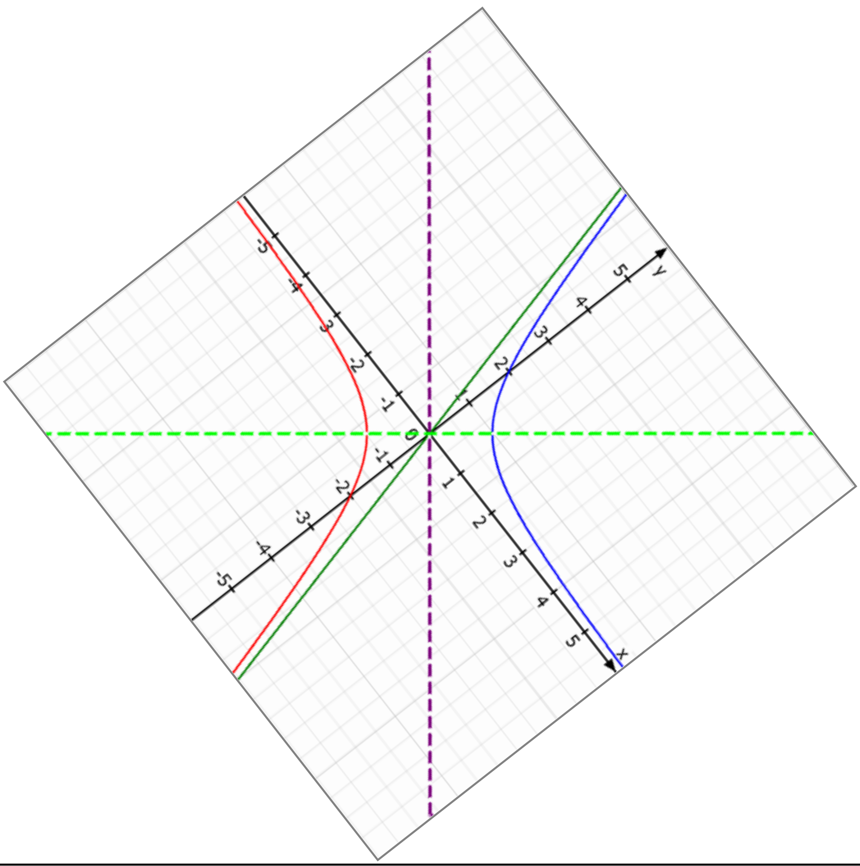
Steigung der Strecke OC:

$$m_1=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4}{\sqrt{17}-1}\approx 1{,}28$$

Gerade w_1 = (OC): $y=\frac{4}{\sqrt{17}-1}\cdot x\approx 1{,}28\cdot x$

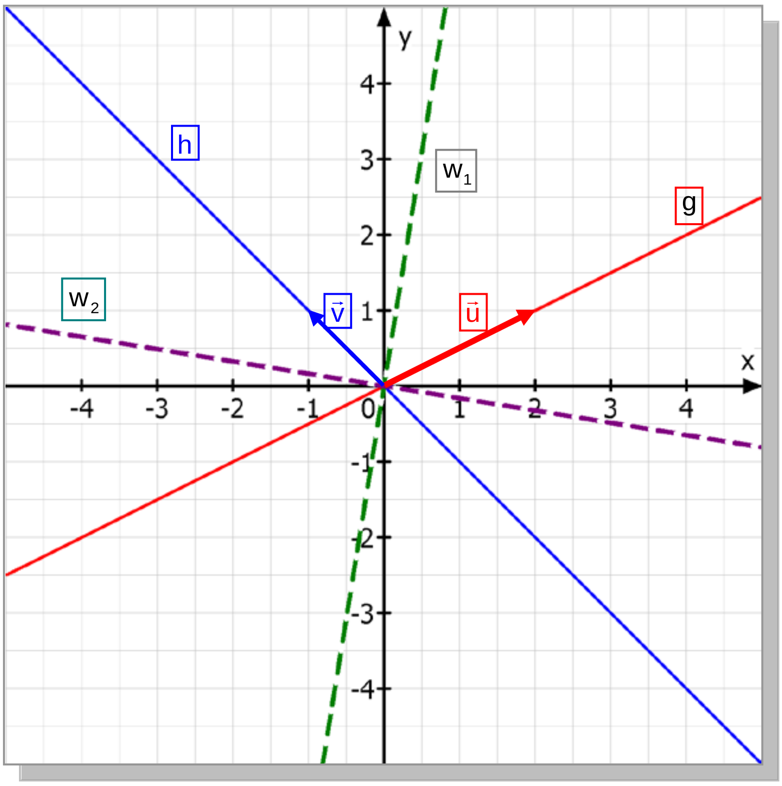
Für die dazu orthogonale Gerade w_2 verwendet man den negativen Kehrwert als Steigung:

$m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{\sqrt{17}-1}{4}\approx-\frac{1}{1{,}28}\approx-0{,}78$, was dann zu $y=-0{,}78\cdot x$ führt.



Beispiel 2 **Gegeben sind g: $y = \frac{1}{2}x$ und h: $y = -x$**
Berechne die Gleichung der beiden Winkelhalbierenden

Verwendung der vektoriellen Methode.



Möglicher Richtungsvektor für g:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Möglicher Richtungsvektor für h:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beide Vektoren muss man gleich lang „machen", damit ihre Summe zu einer Raute führt.

Beträge dieser Vektoren:

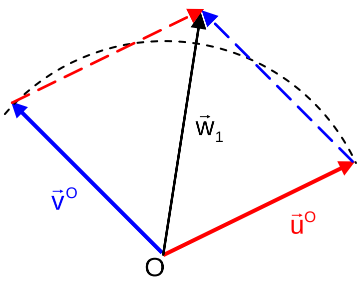
$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 1^1} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Normierung (auf die Länge 1):

$$\vec{u}^O = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}^O = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$



Summe: $$\vec{w}_1 = \vec{u}^O + \vec{v}^O = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{10}} \\ \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Die Abbildung zeigt in vergrößerter Darstellung die gleich langen Pfeile von $\vec{u}^O$ und $\vec{v}^O$ (beide haben die Länge 1). Ihre Summe ergibt die Rautenfigur und die Diagonale, dargestellt durch den Vektor $\vec{w}_1$ bildet deren erste Diagonale, welche den Winkel zwischen $\vec{u}^O$ und $\vec{v}^O$ bei O halbiert.

Steigung des Vektors $\vec{w}_1$: $$m_1 = \frac{w_2}{w_2} = \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}}}{\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

$$m_1 = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right) \cdot \left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right) \cdot \left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{4 + \sqrt{10} + 2\sqrt{10} + 5}{8-5} = \frac{9 + 3\sqrt{10}}{3} = 3 + \sqrt{10}$$

Erg.: Die Winkelhalbierende w_1 hat somit diese Gleichung: $y = \left(3 + \sqrt{10}\right)x$

Die zweite Winkelhalbierende w_2 steht auf w_1 senkrecht. Also kann man ihre Steigung so berechnen:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{3+\sqrt{10}}$$

Durch Erweitern mit $3-\sqrt{10}$ erhält man:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{\left(3-\sqrt{10}\right)}{\left(3+\sqrt{10}\right)\left(3-\sqrt{10}\right)} = -\frac{3-\sqrt{10}}{9-10} = \cancel{-}\frac{3-\sqrt{10}}{\cancel{-}1} = 3-\sqrt{10}$$

Ergebnis: Die 2. Winkelhalbierende hat die Gleichung:

w_2: $\boxed{y = \left(3-\sqrt{10}\right)x}$

Zusatz: Dreht man die ganze Anordnung um den Ursprung, so dass die Winkelhalbierenden parallel zur den üblichen Koordinatenrichtungen werden, dann sieht das Ergebnis so aus.

Die Frage, um wie viel Grad man drehen muss, lässt sich leicht klären:

w_2 hat die (negative) Steigung: $m = 3-\sqrt{10}$.

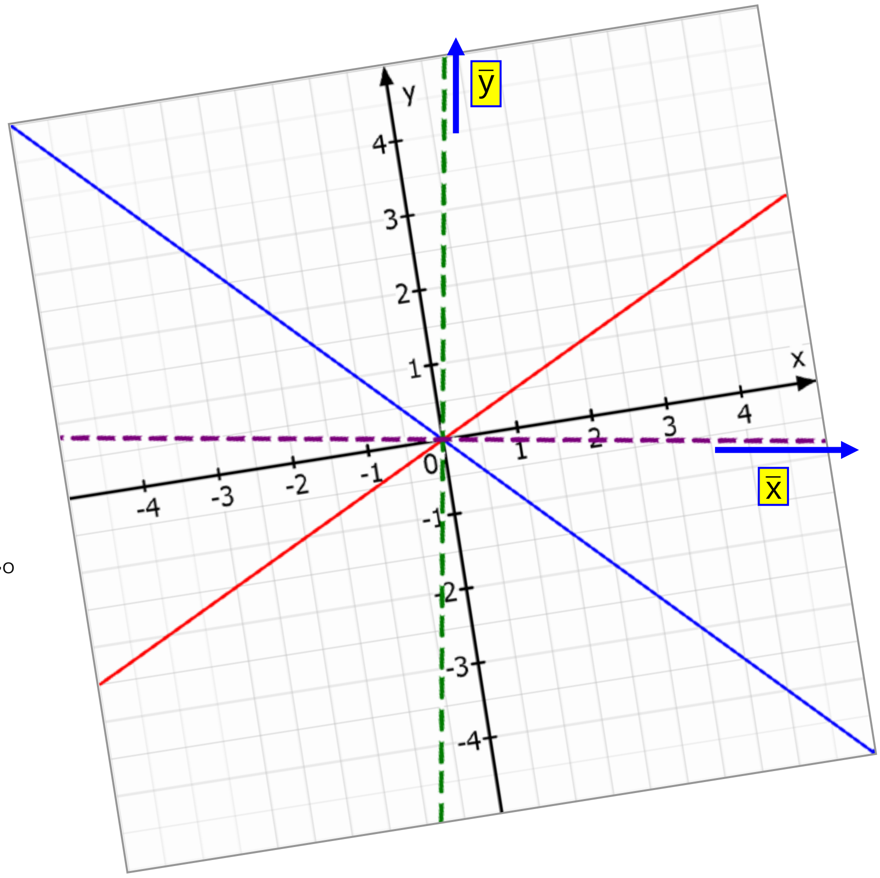
Dies ist der Tangens des Steigungswinkels:

$\tan\alpha_2 = 3-\sqrt{10}$

Dazu gehört

$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(3-\sqrt{10}\right) \approx -9{,}217^{\circ}$

Dreht man also die Anordnung um $9{,}217^{\circ}$, dann liegt w_2 horizontal und w_1 vertikal.



<u>Zusatzfrage:</u>

Welche Gleichungen haben dann die beiden gegebenen Geraden g und h?

g hat die Gleichung $y = \frac{1}{2}x$. Wir müssen den Steigungswinkel vergrößern:

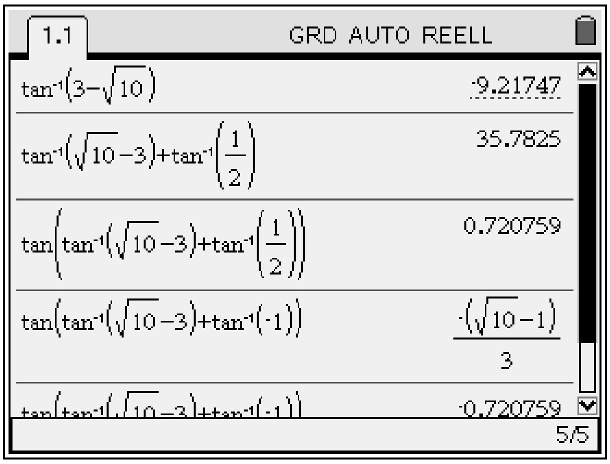
Aus $\alpha_g = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ wird dann $\alpha_{\bar{g}} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{10}-3\right) \approx 35{,}7825$ und daraus die neue Steigung:

$m_2{}' = \tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{10}-3\right)\right] \approx \tan 35{,}7825 \approx 0{,}72$

Ergebnis: $\bar{g}$: $y = 0{,}72 \cdot x$ Für $\bar{h}$ folgt dann $y = -0{,}72 \cdot x$.

Interessant wird die Sache, wenn man mit TI Nspire CAS die Sache durchrechnet

Im Modus „AUTO“ erhielt ich diese Rechnung:



Zuerst habe ich den Steigungswinkel von w_2 berechnet: -9,2174°.

Dann folgt der Steigungswinkel von $\bar{g}$, die aus g durch Drehung um $\beta = +9{,}2174$ entsteht. Statt dieser Zahl habe ich mit $\tan^{-1}\left(\sqrt{10}-3\right)$ gerechnet. Der Tangens dieses Winkels ist die Steigung von $\bar{g}$. Damit hat $\bar{g}$ die Gleichung:

$y = 0{,}720795 \cdot x$.

Die zweite Gerade h hatte die Steigungszahl -1, so dass man auf dieselbe Weise für die gedrehte Gerade $\bar{h}$ die Steigungszahl $m_{\bar{h}} = -\frac{\sqrt{10}-1}{3} \approx -0{,}720759$ erhält.

Also hat $\bar{h}$ die Gleichung $y = -0{,}720795 \cdot x$.

Man erkennt, dass $\bar{g}$ und $\bar{h}$ spiegelbildlich hinsichtlich der x-Achse zueinander liegen.

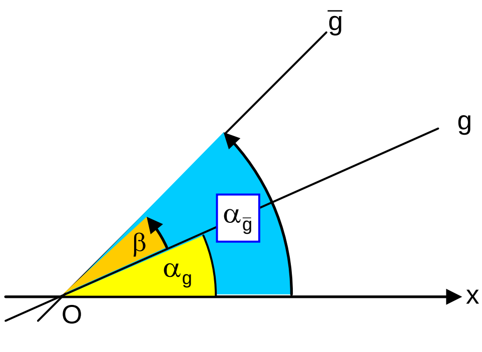
Das muss so sein, denn die x-Achse ist nach der Drehung ja das Bild der Winkelhalbierenden w_2!

Das Interessante daran, ist die Tatsache, dass Nspire für $\bar{h}$ auch einen exakten Wert liefert, nämlich $m_{\bar{h}} = -\frac{\sqrt{10}-1}{3}$. Dann gilt für die Steigung von $\bar{g}$ $m_{\bar{g}} = \frac{\sqrt{10}-1}{3}$.

Damit kann man weitergehend die Frage stellen, wie man diesen Wert trigonometrisch berechnen kann!

Der Steigungswinkel von $\bar{g}$ ist die Summe des Steigungswinkels α_g von g und der Drehwinkels β:

Man benötigt daher die Formel für den Tangens des Summenwinkels:



$$\tan\alpha_{\bar{g}} = \boxed{\tan\left(\alpha_g + \beta\right) = \frac{\tan\alpha_g + \tan\beta}{1 - \tan\alpha_g \cdot \tan\beta}}$$

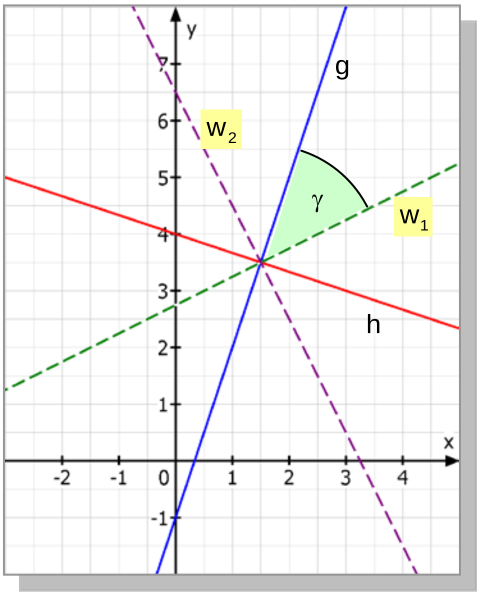
$$\tan\alpha_{\bar{g}} = \frac{\frac{1}{2} + \left(\sqrt{10}-3\right)}{1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{10}-3\right)} = \frac{1 + 2\sqrt{10} - 6}{2 - \sqrt{10} + 3} = \frac{2\sqrt{10}-5}{5-\sqrt{10}} = \frac{\left(2\sqrt{10}-5\right)\cdot\left(5+\sqrt{10}\right)}{\left(5-\sqrt{10}\right)\cdot\left(5+\sqrt{10}\right)}$$

$$\tan\alpha_{\bar{g}} = \frac{10\sqrt{10} + 20 - 25 - 5\sqrt{10}}{25-10} = \frac{5\sqrt{10}-5}{15} = \frac{5\cdot\left(\sqrt{10}-1\right)}{15} = \boxed{\frac{\sqrt{10}-1}{3}}$$

Dabei wurde zuerst der Bruch mit 2 erweitert, dann zusammengefasst und schließlich so erweitert, dass im Nenner die Anwendung der 3. binomischen Formel die Wurzeln wegfallen lässt!

Beispiel 3 **Gegeben sind g: $y = 3x - 1$ und h: $y = -\frac{1}{3}x + 4$**
Berechne die Gleichung der beiden Winkelhalbierenden

Verwendung der trigonmetrischen Methode.



Hier sind die gegebenen Geraden orthogonal, denn das Produkt ihrer Steigungen ist -1:

$m_1 \cdot m_2 = -1$ oder so formuliert: $m_h - \frac{1}{m_g}$.

Die Winkelhalbierenden zerlegen diesen Winkel in 2 mal 45^O.

Diese Situation ermöglicht eine sehr komfortable Lösung.

Bekanntlich gilt für den Schnittwinkel zweier Geraden:

$$\tan\gamma = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$$

Wir betrachten den Schnittwinkel zwischen g und w_1. Diese hat genau 45^O.
Also ist $\tan\gamma = \tan 45^O = 1$. Ferner ist $m_g = m_1 = 3$.

$$1 = \left|\frac{3 - m_2}{1 + 3 \cdot m_2}\right|$$

Also gilt:

$$\frac{3 - m_2}{1 + 3 \cdot m_2} = \pm 1$$

1. Fall: $\boxed{+}$:

$$\frac{3 - m_2}{1 + 3 \cdot m_2} = 1 \Leftrightarrow 3 - m_2 = 1 + 3 \cdot m_2$$

$$2 = 4 \cdot m_2 \Leftrightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

2. Fall: $\boxed{-}$:

$$\frac{3 - m_2}{1 + 3 \cdot m_2} = -1 \Leftrightarrow 3 - m_2 = -1 - 3 \cdot m_2$$

$$2m_2 = -4 \Leftrightarrow m_2 = -2$$

Man erhält also die beiden Steigungen der zueinander orthogonalen Winkelhalbierenden.

Für die Gleichungen der Winkelhalbierenden benötigt man dann noch den Schnittpunkt $S(1{,}5 \,|\, 3{,}5)$.

Die Punkt-Steigungsform liefert dann:

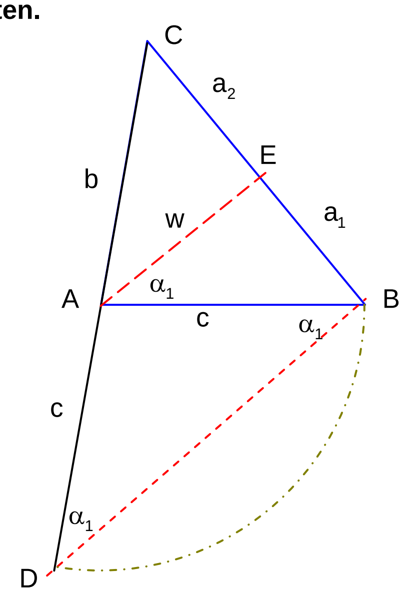
$$y - 3{,}5 = \frac{1}{2} \cdot (x - 1{,}5) \qquad \text{bzw.} \qquad y - 3{,}5 = -2 \cdot (x - 1{,}5)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{4} \qquad\qquad y = -2x$$

2. Die Winkelhalbierende teilt die Gegenseite

SATZ:

In einem Dreieck teil die Winkelhalbierende die Gegenseite ihres Winkels im gleichen Verhältnis, wie die anliegenden Seiten.



In der Abbildung heißt dies:

Die Winkelhalbierende w des Winkels α Im Dreieck ABC teilt die Strecke a im Verhältnis c : b.

Genauer: $\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{c}{b}}$

Diesen Satz kann man mit Hilfe des 1. Strahlensatzes beweisen, oder auch vektoriell

1. Beweis:

Man verlängert die Seite AC über A hinaus und zeichnet zur Winkelhalbierenden w eine Parallele durch B.

Diese schneidet die Gerade (AC) in einem Punkt D:

Das neu entstandene Dreieck ABD ist gleichschenklig, denn weil DB parallel zu AE ist, tritt α_1 außer bei A noch bei B als Wechselwinkel und bei D als Stufenwinkel in Erscheinung.

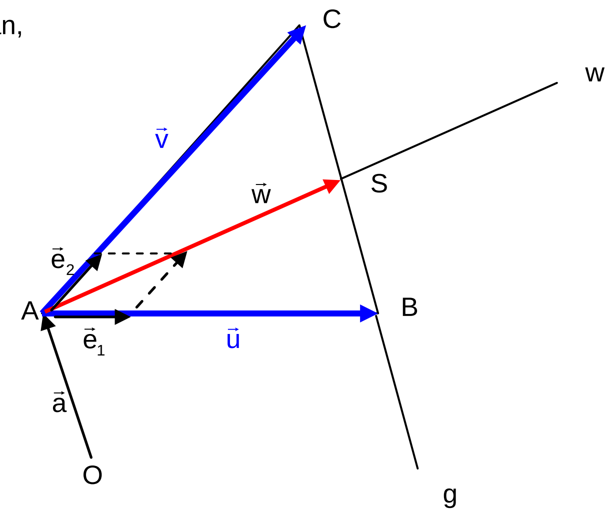
Also hat das Dreieck ABD an der Seite DB zwei gleich große Winkel.

Andererseits ist die ganze Figur eine „Strahlensatzfigur“, weil zwei sich in C schneidende Geraden von zwei Parallelen geschnitten werden. Nach dem 1. Strahlensatz gilt daher:

$$\frac{CE}{EB} = \frac{CA}{AD} \quad \text{oder mit anderen Bezeichnungen:} \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{b}{c}.$$

Nimmt man den Kehrwert, hat man die Behauptung.

2. Beweis: Vektoriell:



Die Richtung der Winkelhalbierenden gewinnt man, indem man, indem man die Seitenvektoren $\vec u$ und $\vec v$ normiert, also auf die Länge 1 bringt und dann addiert.

Normierung von $\vec u$: $\quad \vec e_1 = \frac{1}{u}\cdot\vec u$

wobei $u = |\vec u|$, also die Länge der Grundseite c ist.

Normierung von $\vec v$: $\quad \vec e_2 = \frac{1}{v}\cdot\vec v$

wobei $v = |\vec v|$, also die Länge der Seite b ist.

$\vec e_1$ und $\vec e_2$ sind Einheitsvektoren, also beide mit der Länge 1. Ihr Summenvektor gibt dann die Winkelhalbierenden-Richtung der Raute an, welche die Summierung darstellt.

Programm:

1. Wir stellen die Gleichungen der Winkelhalbierenden und der Geraden g = (BC) auf und berechnen deren Schnittpunkt.
2. Dann berechnen wir die Längen der Teilstrecken BS und SC und deren Verhältnis.
3. Wir zeigen dann, dass dieses mit dem Verhältnis der Seitenlängen u und v übereinstimmt.

Lösung:

1. Gleichung der Winkelhalbierenden w: $\quad \vec x = \vec a + r\cdot(\vec e_1 + \vec e_2)$

bzw. $\quad \vec x = \vec a + r\cdot\left(\frac{\vec u}{u} + \frac{\vec v}{v}\right)$

Gleichung der Geraden g = (BC); $\quad \vec x = \vec b + s\cdot\overrightarrow{BC}$

Es ist $\vec b = \vec a + \vec u$

und $\overrightarrow{BC} = \vec v - \vec u$

Also folgt: $\quad \vec x = \vec a + \vec u + s\cdot(\vec v - \vec u)$

Gleichsetzen: $\quad \vec a + r\cdot\left(\frac{\vec u}{u} + \frac{\vec v}{v}\right) = \vec a + \vec u + s\cdot(\vec v - \vec u) \quad | \ -\vec a$

$$r\cdot\left(\frac{\vec u}{u} + \frac{\vec v}{v}\right) = \vec u + s\cdot(\vec v - \vec u)$$

Ausmultiplizieren: $\quad \frac{r}{u}\vec u + \frac{r}{v}\vec v = \vec u + s\vec v - s\vec u$

Ordnen: $\frac{r}{u}\vec{u} - \vec{u} + s\vec{u} + \frac{r}{v}\vec{v} - s\vec{v} = \vec{o}$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ ausklammern: $\left(\frac{r}{u} - 1 + s\right)\vec{u} + \left(\frac{r}{v} - s\right)\vec{v} = \vec{o}$

Diese Gleichung stellt eine Linearkombination der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ dar.

Weil diese aber linear unabhängig sind, kann nur dann der Nullvektor als Ergebnis herauskommen, wenn die Koeffizienten, also die Klammern 0 sind.

Somit folgen diese beiden Gleichungen: $\left\{\begin{array}{l} \frac{r}{u} - 1 + s = 0 \\ \frac{r}{v} - s = 0 \end{array}\right\}$ (1) (2)

Elimination von s durch Addition der beiden Gleichungen:

$$\frac{r}{u} - 1 + \frac{r}{v} = 0 \quad | \cdot uv$$

$$rv - uv + ru = 0$$

Nach r auflösen: $r(v+u) = uv$

$$\boxed{r = \frac{uv}{v+u}}$$

r in (2) einsetzen ergibt s: $s = \frac{r}{v} \Leftrightarrow \boxed{s = \frac{u}{v+u}}$

Berechnung von S aus g: $\vec{x}_S = \vec{a} + \vec{u} + \frac{u}{v+u}(\vec{v} - \vec{u})$

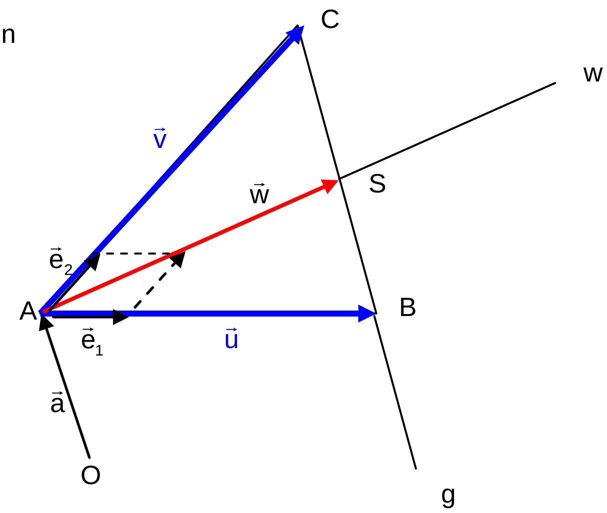
Vektor $\overrightarrow{BS} = \vec{x}_S - \vec{b} = \cancel{(\vec{a} + \vec{u})} + \frac{u}{v+u}(\vec{v} - \vec{u}) - \cancel{(\vec{a} + \vec{u})} = \frac{u}{v+u}(\vec{v} - \vec{u}) = \boxed{\frac{u}{v+u}\overrightarrow{BC}}$

Vektor $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BC} - \frac{u}{v+u}\overrightarrow{BC} = \left(1 - \frac{u}{v+u}\right)\overrightarrow{BC} = \left(\frac{v+u}{v+u} - \frac{u}{v+u}\right)\overrightarrow{BC} = \boxed{\frac{v}{v+u}\overrightarrow{BC}}$

Für das Streckenverhältnis gilt also: $\frac{BS}{SC} = \frac{\frac{u}{u+v}}{\frac{v}{u+v}} = \frac{u}{v}.$

Damit ist dieser Satz bewiesen.

3. Beweis, auch vektoriell.



Anstatt S durch den Schnitt zweier Geraden zu berechnen bilden wir eine geschlossene Vektorkette:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SA}=\vec{o} \qquad (1)$$

Nun drücken wir diese Vektoren durch die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aus:

$$\overrightarrow{AB}=u$$

$$\overrightarrow{BS}=s\cdot\overrightarrow{BC}=s\cdot(\vec{v}-\vec{u})$$

$$\overrightarrow{SA}=r\cdot(\vec{e}_1+\vec{e}_2)=r\left(\frac{\vec{u}}{u}+\frac{\vec{v}}{v}\right)$$

Damit ändert sich (1) in:

$$\vec{u}+s\cdot(\vec{v}-\vec{u})+r\left(\frac{\vec{u}}{u}+\frac{\vec{v}}{v}\right)=\vec{o}$$

Wir ordnen diese Summe nach $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$$\vec{u}-s\vec{u}+\frac{r}{u}\vec{u}+s\vec{v}+\frac{r}{v}\vec{v}=\vec{o} \qquad \text{d. h.} \qquad \left(1-s+\frac{r}{u}\right)\vec{u}+\left(s+\frac{r}{v}\right)\vec{v}=\vec{o}$$

Diese Gleichung stellt eine Linearkombination der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ dar.

Weil diese aber linear unabhängig sind, kann nur dann der Nullvektor als Ergebnis herauskommen, wenn die Koeffizienten, also die Klammern 0 sind.

Somit folgen diese beiden Gleichungen: $\left\{\begin{matrix} 1-s+\frac{r}{u}=0 \\ s+\frac{r}{v}=0 \end{matrix}\right\}$ (1) (2)

(1) + (2): $1+\frac{r}{u}+\frac{r}{v}=0 \quad |\cdot uv$

$$uv+rv+ru=0$$

$$r(u+v)=-uv \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{r=-\frac{uv}{u+v}}$$

In (2): $s=-\frac{r}{v} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{s=\frac{u}{u+v}}$

Also ist $\overrightarrow{BS}=s\cdot\overrightarrow{BC}=\boxed{\frac{u}{u+v}\cdot\overrightarrow{BC}}$.

Der obere Teilungsabschnitt wird repräsentiert durch den Vektor $\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BS}$

$$\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{BC}-\frac{u}{u+v}\overrightarrow{BC}=\left(1-\frac{u}{u+v}\right)\overrightarrow{BC}=\left(\frac{u+v}{u+v}-\frac{u}{u+v}\right)\overrightarrow{BC}=\boxed{\frac{v}{u+v}\overrightarrow{BC}}$$

Das Teilverhältnis ist somit: $\frac{BS}{SC}=\frac{\frac{u}{u+v}}{\frac{v}{u+v}}=\frac{u}{v}$

Was zu beweisen war.